Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	**Cours** Systèmes d'équations	Niveau : 3éme_Collège Année : 2023-2024

1 Équation linéaire à deux inconnues

Définition (Équation linéaire à deux inconnues)**.**

Une équation linéaire à deux inconnues est une équation du type $ax+by=c$ où a, b et c sont des nombres et x et y sont les inconnues.

Exemples :

Avec $a=5$, $b=-3$ et $c=8,5$: on obtient $5x-3y=8,5$.
Avec $a=-2$, $b=0$ et $c=3$: on obtient $-2x=3$.

Plus concrètement : le C.D.I. achète x exemplaires d'un manuel de mathématiques à 23 € l'unité et y exemplaires d'un manuel de français à 27,50 € l'unité. Le total du prix des manuels est de 1 345 €.
Cette situation peut s'écrire mathématiquement : $23x+27,50y=1\,345$.

Définition (Couple solution)**.**

On dit qu'un couple de nombres $(u;v)$ est solution d'une équation linéaire à deux inconnues $ax+by=c$ si on a bien l'égalité $au+bv=c$.

Exemples :

Soit l'équation $-7x+5y=1$.
Le couple $(2;3)$ est solution. En effet : en remplaçant $(x;y)$ par $(2;3)$ on obtient : $-7\times 2+5\times 3=-14+15=1$.
Le couple $(3;4)$ n'est pas solution car $-7\times 3+5\times 4=-21+20=-1\neq 1$.
Le couple $(-3;-4)$ est solution car $-7\times(-3)+5\times(-4)=21-20=1$.

2 Représentation graphique des solutions d'une équation linéaire à deux inconnues

Propriété

On peut représenter graphiquement tous les couples solutions possibles d'une équation linéaire $ax+by=c$, avec a,b,c non tous nuls. Pour cela, il suffit de tracer la fonction affine $y=f(x)=\dfrac{-ax+c}{b}$ si $b\neq 0$ ou la fonction affine $x=\dfrac{c}{a}$ (droite vecticale) si $b=0$.

Remarque :

Cette propriété peut paraître complexe lors d'une première lecture et il est vrai qu'il y a beaucoup de choses à en dire. Le mieux étant de voir directement de quoi il retourne dans la pratique avec des exemples :

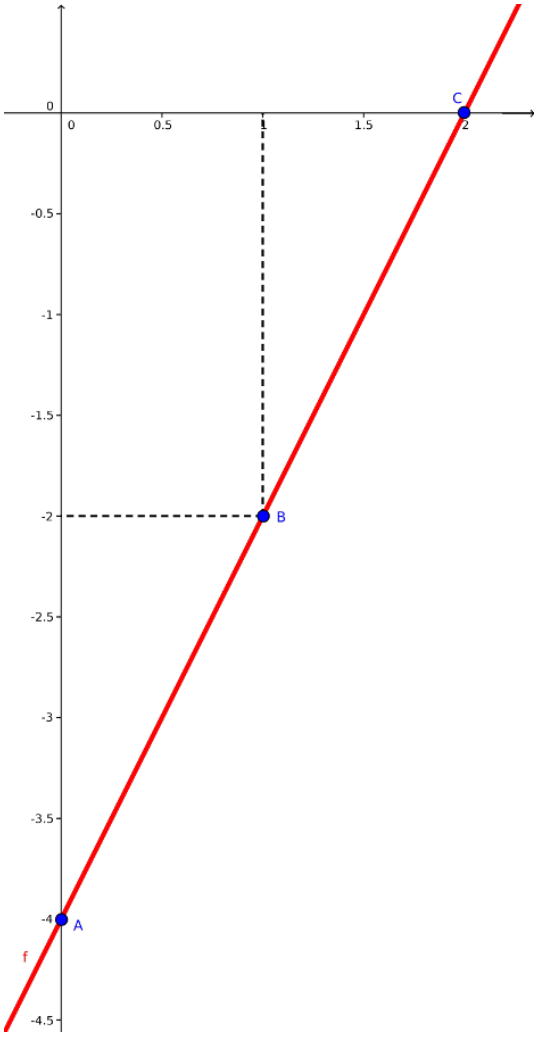
Exemples :

1) Soit, par exemple, l'équation linéaire à deux inconnues suivante : $-4x + 2y = -8$. Nous savons qu'elle est équivalente à l'équation : $2y = 4x - 8$. En effet :

$$\begin{array}{l} -4x + 2y = -8 \\ \underbrace{+4x - 4x}_{0} + 2y = +4x - 8 \\ 2y = 4x - 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(+4x)} \\ \\ \text{(+4x)} \end{array}$$

Puis, en divisant par 2, cette dernière équation est elle même équivalente à :

$$\begin{array}{l} 2y = 4x - 8 \\ \dfrac{2y}{2} = \dfrac{4x - 8}{2} \\ y = 2x - 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(÷2)} \\ \\ \text{(÷2)} \end{array}$$



Pourquoi transformer l'équation de départ en cette dernière équation ?

Nous allons maintenant considérer chaque couple solution $(x;y)$ de cette équation comme s'il s'agissait des points (*abscisse ;ordonnée*) du graphique d'une fonction, en posant $y = f(x)$. On trace alors le graphe de $f(x) = 2x - 4$ comme dans le chapitre *fonctions affines et linéaires* :

$f(0) = 2 \times 0 - 4 = -4$, donc le graphe passe par le point $A(0;-4)$

$f(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$, donc le graphe passe par le point $B(1;-2)$

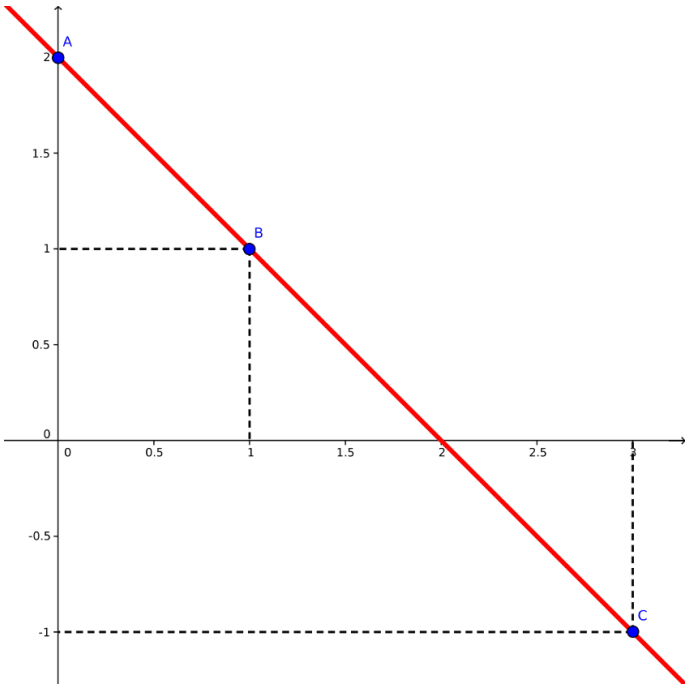
On peut prendre n'importe quel point $C(x;y)$ du graphique, les valeurs du couple $(x;y)$ sont des solutions de l'équation de départ.

Par exemple, le point $C(2;0)$ est un point du graphe de f. $(2;0)$ est donc une solution de l'équation de départ :

$$-4x + 2y = -8$$

En effet, si on remplace x par 2 et y par 0, on obtient bien : $-4x + 2y = -4 \times 2 + 2 \times 0 = -8$

2) Soit l'équation linéaire à deux inconnues suivante : $x + y = 2$.



Cette équation est équivalente à $y = -x + 2$. On considère alors la fonction affine $g(x) = -x + 2$, dont le graphe est tracé ci-contre.

La droite représentant la fonction affine g passe par les points $A(0;2)$ et $B(1;1)$.

Tout point $C(x;y)$ de cette droite représente une solution de l'équation initiale : $x + y = 2$.

Par exemple $C(3;-1)$ est un point de la droite donc le couple $(3;-1)$ est une solution de l'équation initiale. En effet, $3 + (-1) = 2$.

3 Système linéaire de deux équations à deux inconnues

3.1 Défintion

Définition (Système linéaire et solution)**.**

On appelle **système de deux équations linéaires à deux inconnues** un ensemble de deux équations linéaires ayant les mêmes inconnues et que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{cases}$$

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x;y)$ qui sont à la fois solution de la première et de la seconde équation linéaire.

Exemples :

1) On considère le système suivant : $\begin{cases} -4x + 2y &= -8 \\ x + y &= 2 \end{cases}$,

où l'on a en fait $a = -4$, $b = 2$, $c = -8$, $d = 1$, $e = 1$ et $f = 2$.
On cherche donc un couple de nombres $(x;y)$ qui soit à la fois une solution de la première et de la seconde équation.
En fait il existe une seule solution (nous verrons pourquoi dans le prochain paragraphe), le couple $(2;0)$.
En effet, en remplaçant x par 2 et y par 0 dans la première équation on obtient bien : $-4 \times 2 + 2 \times 0 = -8$, et dans la seconde équation : $2 + 0 = 2$.

2) On considère le système suivant : $\begin{cases} 5x - 3y &= 4 \\ 10x - 6y &= 8 \end{cases}$,

où l'on a en fait $a = 5$, $b = -3$, $c = 4$, $d = 10$, $e = -6$ et $f = 8$.
Le couple $(2;2)$ est une solution du système puisque l'on a pour la première équation $5 \times 2 - 3 \times 2 = 10 - 6 = 4$ et pour la seconde $10 \times 2 - 6 \times 2 = 20 - 12 = 8$. Mais ça n'est pas le seul couple solution, $(8;12)$ est aussi une solution puisque $5 \times 8 - 3 \times 12 = 40 - 36 = 4$ et $10 \times 8 - 6 \times 12 = 80 - 72 = 8$. En fait, pour ce système il y a une infinité de solutions (nous verrons aussi pourquoi au prochain paragraphe).

3) Un exemple plus concret : 10 amis vont au restaurant, le gérant du restaurant leut fait savoir que si 8 d'entre-eux prennent le menu A et 2 d'entre-eux prennent le menu B alors ils payeront au total 185 €. Par contre, si 4 d'entre-eux prennent le menu A et 6 le menu B alors ils payeront au total 165 €. Quels sont les prix des menus A et B ?
Posons x le prix du menu A et y le prix du menu B. Le prix payé dans la première situation (8 menus A et 2 menus B) en fonction de x est alors $8x + 2y = 185$. Dans la seconde situation (4 menus A et 6 menus B) on a $4x + 6y = 165$. Nous sommes donc amenés à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 8x + 2y &= 185 \\ 4x + 6y &= 165 \end{cases}$$

Nous pouvons vérifier que $(19,5\,;\,14,5)$ est un couple solution (c'est même le seul possible), en effet :
$8 \times 19,5 + 2 \times 14,5 = 185$ et $4 \times 19,5 + 6 \times 14,5 = 165$. Le prix du menu A est donc de 19,50 €et celui du menu B est de 14,50 €.

La seule question qui demeure est : **comment fait-on pour trouver ces couples solutions ?** Il y a au moins trois méthodes développées dans les paragraphes suivants :

3.2 Résolution graphique

Propriété

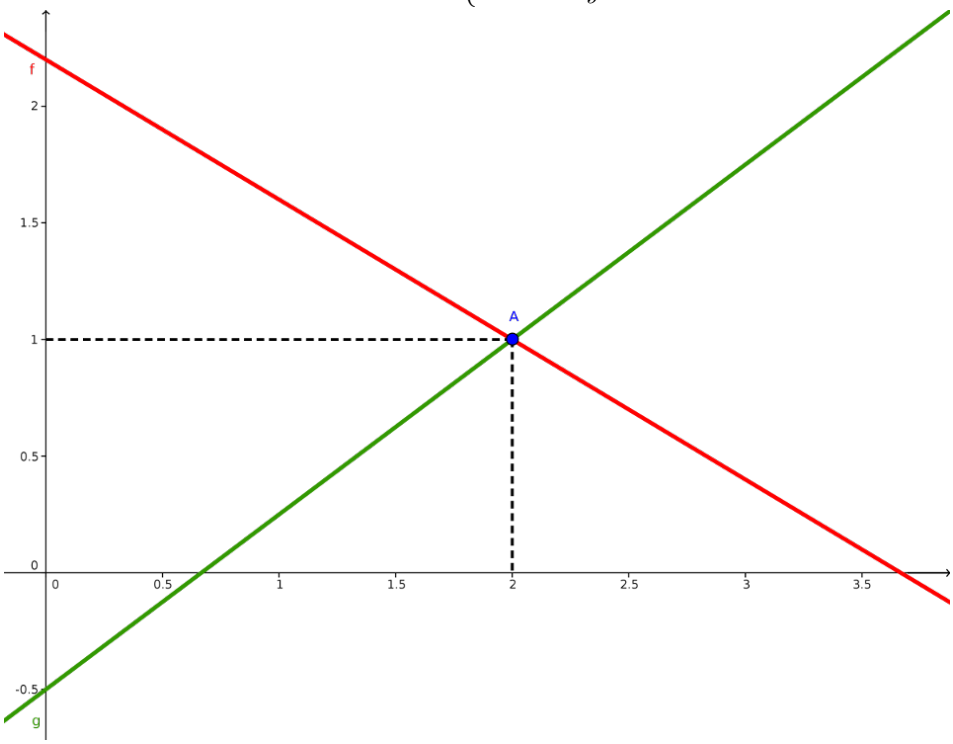
On peut résoudre graphiquement un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{cases}$$

Pour cela il suffit de tracer les droites représentant chacune des équations, puis on regarde les points communs entre ces droites.
Trois cas sont possibles :
- Les droites sont sécantes : 1 point d'intersection, donc une unique solution au système.
- Les droites sont confondues : une infinité de points communs, donc une infinité de solutions au système.
- Les droites sont parallèles : pas de point commun, le système n'a donc pas de solution.

Exemples :

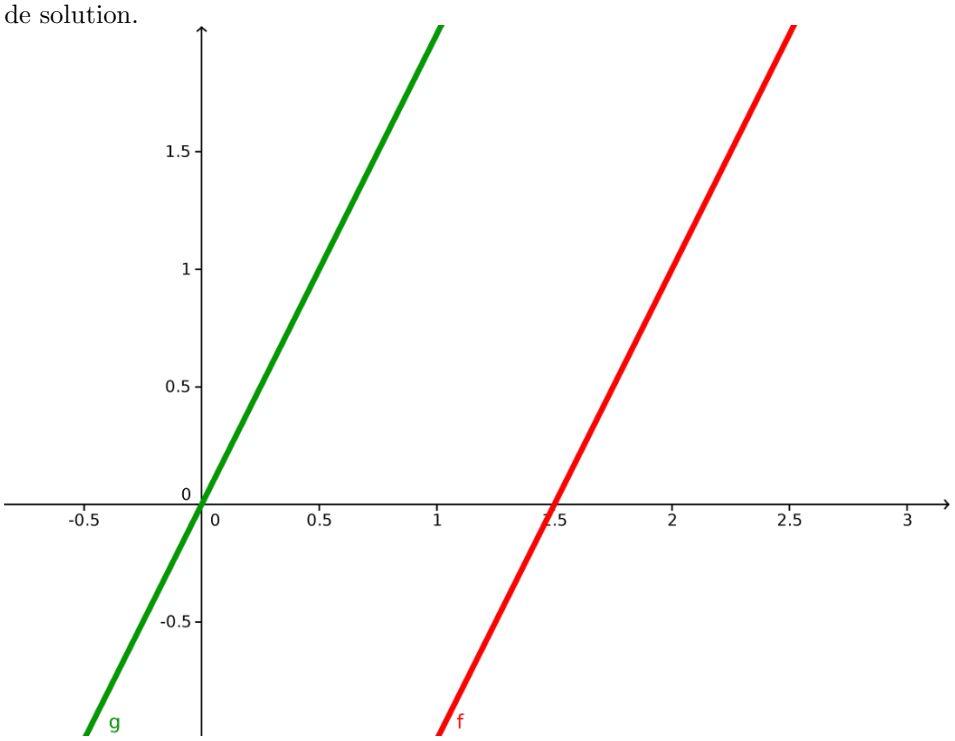
1) On considère le système suivant : $\begin{cases} 3x + 5y &= 11 \\ -3x + 4y &= -2 \end{cases}$



La première équation est équivalente à $y = \dfrac{-3x + 11}{5} = -0,6x + 2,2$. On a tracer en rouge la fonction $f(x) = -0,6x + 2,2$ et la seconde équation est équivalente à $y = \dfrac{3x - 2}{4} = 0,75x - 0,5$. On a tracer en vert la fonction $g(x) = 0,75x - 0,5$. Les deux droites se coupent en un unique point $A(2;1)$, il y a donc une seule solution au système : $x = 2$ et $y = 1$.

2) On considère le système suivant : $\begin{cases} 4x-2y &= 6 \\ 2x-y &= 0 \end{cases}$

La première équation est équivalente à $y = \dfrac{4x-6}{2} = 2x-3$. La seconde équation est elle équivalente à $y = 2x$. En traçant les fonctions affines correspondantes on s'aperçoit vite qu'elles semblent parallèles (et c'est bien le cas puisqu'elles ont le même coefficient directeur : 2 !). Il n'y a donc aucun point d'intersection, le système n'a donc pas de solution.



3.3 Résolution par le calcul

La méthode précédente est intéressante puisqu'elle permet de résoudre visuellement un système mais elle a un gros inconvénient : elle n'est pas du tout précise. En effet, trouver un point d'intersection dont l'abscisse peut avoir de nombreuses décimales n'est pas évident... Voici deux variantes d'une méthode calculatoire :

Méthode de combinaison

Propriété

1) On ne change pas les solutions d'un système linéaire lorsque l'on multiplie on divise chaque membre d'une des équations par un même nombre non nul.

2) On peut ajouter ou soustraire membre à membre deux équations d'un même système linéaire sans changer les solutions du système.

Exemples :

Considérons le système suivant : $\begin{cases} 4x-2y &= 6 & (L1) \\ 2x-5y &= -7 & (L2) \end{cases}$ où l'on a appelé $L1$ la première équation et $L2$ la seconde.

Le **1)** de la propriété dit que l'on peut remplacer, par exemple, $L2$ par un multiple de $L2$. Par exemple, remplacer $L2$ par $2 \times L2$ (on notera : $2 \times L2 \to L2$), on obtient :

$$2 \times L2 \quad : \quad 4x-10y = -14$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} 4x-2y &= 6 & (L1) \\ 4x-10y &= -14 & (L2) \end{cases}$$

Pourquoi faire une telle manipulation ? Parce que maintenant, en se servant du **2)**, on va pouvoir supprimer une inconnue. En effet, la seconde partie de la propriété nous dit que l'on peut soustraire membre à membre les deux

équations du système, par exemple en faisant $L1 - L2$, on obtient pour le membre de gauche :

$$4x - 2y - (4x - 10y) = 4x - 2y - 4x + 10y = 8y$$

Étant donné qu'il y avait le même nombre d'x dans les deux équations, la soustraction à permis de les supprimer.

Pour le membre de droite on obtient tout simplement :

$$6 - (-14) = 6 + 14 = 20$$

On a donc finalement :

$$8y = 20$$

soit :

$$y = \frac{20}{8} = 2,5$$

Reste à trouver la valeur de x correspondant. Pour cela c'est très simple, on remplace la valeur de y trouvée dans l'une des deux équations, par exemple, si l'on remplace y par $2,5$ dans le première équation, on obtient :

$$4x - 2y = 6$$

$$4x - 2 \times 2,5 = 6$$

Soit :

$$4x - 5 = 6$$

ou encore

$$4x = 6 + 5 = 11$$

Donc :

$$x = \frac{11}{4} = 2,75$$

Nous avons finallement trouvé le couple solution du système : $(2,75\ ;\ 2,5)$

Un second exemple :
Problème : chez le fleuriste, si j'achète 5 roses et 7 tulipes je payerai 47 €; si j'achète 6 roses et 6 tulipes je payerai 48 €. Quel est le prix d'une rose ? D'une tulipe ?

Résolution : on pose x le prix d'une rose et y celui d'une tulipe. D'après l'énoncé nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 7y &= 47 \quad (L1) \\ 6x + 6y &= 48 \quad (L2) \end{cases}$$

Il est difficile de muliplier la première équation pour obtenir le même nombre d'x que dans la seconde et réciproquement... Nous allons cette fois-ci multiplier $L1$ par 6 et multiplier $L2$ par 5, nous aurons alors $30x$ pour les deux équations :

$$6 \times L1 \to L1 : \quad 30x + 42y = 282$$

$$5 \times L2 \to L2 : \quad 30x + 30y = 240$$

On a maintenant le système :

$$\begin{cases} 30x + 42y &= 282 \quad (L1) \\ 30x + 30y &= 240 \quad (L2) \end{cases}$$

Maintenant on fait $L1 - L2$: $\quad 30x + 42y - (30x + 30y) = 282 - 240$

$$\text{Soit : } 12y = 42$$

$$\text{Donc : } y = \frac{42}{12} = 3,5$$

Ensuite, toujours comme dans le premier exemple, on remplace y par $3,5$ dans l'une des deux équations de départ : Par exemple dans la première : $5x + 7y = 47$, on obtient :

$$5x + 7 \times 3,5 = 47$$

$$5x + 24,5 = 47$$

$$5x = 22,5$$

$$x = \frac{22,5}{5} = 4,5$$

Une rose coûte donc 4,50 € et une tulipe 3,50 €.

Méthode de substitution

Cette dernière méthode consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre pour ensuite l'injecter dans une équation. Concrètement on applique plusieurs étapes :
1) On isole une inconnue (on l'exprime en fonction de l'autre)
2) On remplace l'expression trouvée dans l'autre équation
3) On obtient alors une équation avec une seule inconnue que l'on résout.
4) On trouve la valeur de l'autre inconnue comme dans la méthode par combinaison.

Exemple :

On considère le système suivant $\begin{cases} 4x - 2y &= 6 \\ 3x - y &= 5 \end{cases}$

1) On isole y dans la seconde équation (c'est plus simple) : $3x - y = 5$ devient $y = 3x - 5$.

2) On remplace dans l'autre équation (la première) y par l'expression que l'on a trouvé dans 1). La première équation $4x - 2y = 6$ devient alors $4x - 2(3x - 5) = 6$.

3) Nous avons maintenant une équation assez simple, avec une seule inconnue : x. On la résout :

$$4x - 2(3x - 5) = 6$$

On distribue tout d'abord -2 à l'intérieur des parenthèses :

$$4x - 6x + 10 = 6$$
$$-2x + 10 = 6$$
$$-2x = 6 - 10$$
$$x = \frac{-4}{-2} = 2$$

4) On remplace x par 2, par exemple dans la seconde équation :

$$3x - y = 5$$
$$3x - (-2) = 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

Un couple solution de ce système est donc $(1; 2)$